１円に内接する四角形ABCDにおいて、内角Aをθとおき、AB=a, BC=b, CD=c, DA=dとおく。2s=a+b+c+dと定義するとき、

が成り立つことを示せ。

**（証明）**

より、まずの値を求める。

四角形ABCDを△ABDと△CDBに分けて考える。

BD=eとおくと、

△ABDにおいて、第二余弦定理より、

なので、

また、△CDBにおいて、第二余弦定理より、

四角形ABCDは円に内接するので、よって、

　（∵三角比の性質）

よって、

以上①，②より、

よって、

ここで、の値を求める。

③より、

ここで、2s=a+b+c+dより、

なので、これらを上式に代入して、

なので、④より、

である。

よって、なので、

**以上より、**

**(Q.E.D.)**

２xについての実数係数の二次方程式の二解が、

で表せることを示せ。

ただし、この問題では結論に達するまでに分数を使わないこと。

**（証明）**

より、であるから、両辺に4aを掛けて、

両辺にを足して、

よって、

これより、

両辺を足し2aで割って、

**(Q.E.D.)**

３無理方程式を解け。

まずはxの範囲を求める。

において、左辺の根号内は正なので、

また、左辺は正なので、右辺も正となる。よって、

①，②を満たすxの範囲は、

　**・・・③**

の両辺を平方して、

ここで、P=5とおくと、

この式をPについて整理して、

これはPについての実数係数の2次方程式なので、解の公式より、

なので、これを④に代入して、

P=5であるので、

または

すなわち、

または

を解くと、

③より、この範囲内のxの値は、

また、を解くと、

③より、この範囲内のxの値は、

**以上⑤，⑥より、無理方程式の解は、**

４ θについての不等式 が成り立つことを示せ。

ただし、θ≧0のとき、（等号成立はθ=0のとき）である。

**（証明）**

まず、のグラフとのそれぞれのグラフが，のそれぞれに関して対称であることを示す。

より、のグラフはに関して対称である。

また、，より、なので、のグラフはに関して対称である。

一方、より、のグラフはに関して対称である。

また、なので、のグラフはに関して対称である。

以上より、のグラフとのそれぞれのグラフが，のそれぞれに関して対称であるので、考えるの範囲として、としても一般性を失わない。

(i)のとき

このとき、はの値に対して単調減少となるので、θ≧0より

また、θ0のときより、この不等式のにを代入して、より、

①，②より、

(ii)のとき

このとき、である。より、なので、

また、である。より、なので、

③，④より、

以上(i)，(ii)より、のとき、が成り立つ。

**従って、すべての実数に対して、が成り立つ。**

**(Q.E.D.)**